

# 國立屏東商業技術學院

企業管理系

畢業專題

專案管理工時估計方法之研究

A Study on the Estimation Methods of  
Projects Management

指導教授：施能輝 老師

專題學生：范雅閔 何政賢

李清雲 陳靜宜

中華民國九十九年一月

國立屏東商業技術學院

企業管理系

學生專題論文

專案管理工時估計方法之研究

口試老師：廖 曜 生  
施 能 輝  
王 志 雄

廖曜生

施能輝

王志雄

中華民國 99 年 1 月 13 日

# 目錄

目錄	2
表目錄	3
圖目錄	3
第壹章 緒論	4
第貳章 文獻探討	5
第一節 PERT 的分析模式	5
第二節 PERT 的相關研究	6
第三節 符號解釋定義	9
第參章 研究目的與方法	10
第一節 研究目的	10
第二節 研究架構	11
第肆章 實驗與探討	12
第一節 標準化 Beta 分配與一般化 Beta 分配下探討 EP-T、ES-M、EL-L	12
第二節 聯立解法	17
第三節 聯立解法延伸探討	24
第伍章 結論與後續研究	24
第一節 研究發現與結論	28
第二節 後續研究與建議	28
參考文獻	28

## 表目錄

表 1	西元 1965 年~1992 年 PERT 公式來源.....	6
表 2	PERT 公式整理.....	7
表 3	PERT 公式誤差率比較.....	8
表 4	EL-L、EP-T 與 Lau, A., Lau, H and Zhang, Y 的公式作誤差大小的比較.....	9
表 5	標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析- $[\alpha>1, \beta>1]$ .....	14
表 6	標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析- $[0<\alpha<1, 0<\beta<1]$ .....	14
表 7	標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析- $[0<\alpha<1, \beta>1]$ .....	15
表 8	標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析- $[\alpha>1, 0<\beta<1]$ .....	15
表 9	標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析- $[\alpha>1, \beta>1]$ .....	16
表 10	標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析 $[0<\alpha<1, 0<\beta<1]$ .....	16
表 11	標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析 $[0<\alpha<1, \beta>1]$ .....	16
表 12	標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析 $[\alpha>1, 0<\beta<1]$ .....	16
表 13	一般化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析.....	16
表 14	聯立解法與 EP-T 誤差比率分析- $[\alpha>1, \beta>1]$ .....	18
表 15	聯立解法在不同變異之下誤差比率分析.....	27

## 圖目錄

圖 1	研究架構圖.....	11
圖 2	收斂問題一 $(\alpha, \beta)$ 分佈 圖.....	18
圖 3	收斂問題一 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈 圖.....	19
圖 4	收斂問題二 $(\alpha, \beta)$ 分佈 圖.....	19
圖 5	收斂問題二 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈圖.....	20
圖 6	收斂問題二 $(\alpha, \beta)$ 分佈圖- $[\alpha>1, \beta>1]$ .....	20
圖 7	收斂問題二 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈圖- $[\alpha>1, \beta>1]$ .....	21
圖 8	收斂問題二 $(\alpha, \beta)$ 分佈圖- $[\alpha<1, \beta<1]$ .....	21
圖 9	收斂問題二 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈圖- $[\alpha<1, \beta<1]$ .....	22
圖 10	收斂問題二 $(\alpha, \beta)$ 分佈圖- $[\alpha \geq 1, 0 < \beta \leq 1]$ .....	22
圖 11	收斂問題二 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈圖- $[\alpha \geq 1, 0 < \beta \leq 1]$ .....	23
圖 12	收斂問題二 $(\alpha, \beta)$ 分佈圖- $[0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 1]$ .....	23
圖 13	收斂問題二 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈圖- $[0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 1]$ .....	24
圖 14	收斂問題二 $(x_{0.25}, x_{0.75})$ 分佈圖.....	25

# 專案管理排程最適估計方法之研究

## PERT 法與聯立解法

施能輝

范雅閔 何政賢 李清雲 陳靜宜

屏東商業技術學院

屏東商業技術學院

企業管理系 副教授

企業管理系 學生

### 摘要

計畫評核術 (PERT)主要是針對不確定性較高的項目評估，通常用於複雜的專案，目的在於有效控制時間與資源。PERT 用樂觀、悲觀及最可能時間的三時法為基礎，在標準 Beta 分配下求算每一作業如期完工之機率，來擬定專案排程。本研究依照幾位前人研究之 PERT 公式運算驗證，了解其過程與方法，更擴大前人公式的研究範圍，找出最精準的 PERT 公式。接著我們提出新的估計方法針對相同的研究範圍 (5 百分位數、95 百分位數)推導，比較出兩者的準確度跟變異程度，將兩者的適用範圍劃分出來，並延伸探討新方法在不同範圍 (25 百分位數、75 百分位數)之下的差異，歸納出個別情況下所產生的問題 (收斂問題及干擾影響等)，以降低實務上工時估計的不確定性程度。

關鍵詞：PERT、專案排程

### 壹、緒論

專案管理在近代的社會當中，使用的非常普遍，不論是在生產、行銷、研發等不同領域都經常被應用，來降低整個計畫的成本與時間，它創造了完整的內容架構及許多有效的運用方法，政府與企業也都大力倡導專案管理，因為在現今如此快速進化的社會當中，企業只有不斷的創新跟進步才能存活下來，必須靈敏的適應環境改變和有效的運用資源及知識，如此一來就需要專案管理來創造一個條理分明的架構與步驟，而每一次追求進步的改變，就是一個專案的執行。

專案中，時間掌控是相當重要的一環，往往影響了整個計劃的進行與資源的調度，而在契約當中也清楚記載了所需達到的目標以及時間，一個好的專案管理通常透過三個階段 (規劃、排程與控制)來加以執行，專案前兩個階段的重點，就是規劃出能使專案時間與資源互相均衡的工作排程，提供一個執行與控制的標準。另外在專案過程中也經常遇到專案成員產生程序上的衝突，這時專案排程工具不只協助領導者進行控制，也可以協調專案成員程序上的問題。

在排程階段，較難計算的就是工時估計的部分，例如專案趕工是企業一定會遇到的問題

之一，因為執行專案時的不確定因素很難預料，專案成本跟時程很容易與目標有所落差，而這時就要用到工時估計的工具來做完工機率的推估，專案管理有幾項常見時程估計的工具

「計畫評核術」(Program Evaluation Review Technique, PERT)是 1950 年代，由美國海軍專案計劃辦公室 (U.S. Navy Special Projects Office)與「Booz, Allen and Hamilton 管理顧問公司」為研發北極星飛彈計畫 (Polaris Missile Program)共同發展而來。

「要徑法」(Critical Path Method, CPM)是由 Remington Rand 公司的 J. E. Kelly 與 Du Pont M.R. Walker 同時在 1957 年執行一個建廠計畫時，發展出來的。計畫評核術與要徑法是目前大型專案計畫最普遍使用的控制方法。

PERT 通常用於大型或是較複雜專案的規劃管理技術。利用作業網方式來分析及控管整個排程，標示出整個計劃中每一事件、活動、工期之間的相互關係，針對專案所處的環境與條件，估算出所需要耗用的成本及資源。同時利用數學方法，進行嚴謹的運算，讓時間、人力與其他資源進行更有效的利用。PERT 經過了幾十年來，不斷的經過專家的修改，為求提供更精準的公式來推算如期完工的機率，因為當專案的完工機率高時，也代表如期完成的機會很大，而在幾位專家逐漸修改 PERT 公式中，精準度的確越來愈高，但是仍然會有一些出現較大誤差的部分，如果能掌握這一些誤差的範圍，進而了解這些 PERT 公式適合應用的時程估計範圍，也能使專案時程的運用較為明瞭。

## 貳、文獻探討

### 一、PERT 的分析模式

計畫評核術的演進，可依作業時間的方式分成以下三大類

(一)確定性模式：只作業時間為一確定數值表示的情況

(二)模糊性模式：認為作業時間具有模糊性質，這是因為作業時間的定義過程中，常參雜專家的主觀性或環境的不確定性所造成的。

(三)機率性模式：認為作業時間具有隨機變異性，所以假設作業時間會服從某種機率分配。

本研究所使用的 PERT 分析是屬於機率性模式，一般實務上最常見的仍是假設作業時間服從 Beta 分配，並計算出之期望值和變異數。由於 Beta 分配是使用 o、m、p 三種數值來描寫作業時間，這些時間可由專家提供意見而得，所以此法又稱三時估計法。依據 Beta 分配，專案中每項作業之時間，其平均值 ( $\mu$ )與變異數 ( $\sigma^2$ )，如公式 (1)與公式 (2)所示：

$$\text{期望值： } \mu = \frac{o + 4m + p}{6} \quad (1)$$

$$\text{變異數： } \sigma^2 = \left( \frac{p - o}{6} \right)^2 \quad (2)$$

**o**：悲觀時間

**m**：最可能時間

**p**：樂觀時間

## 二、Pert 相關之研究

(一)Donald L .Keefer , William A. Verdini (1993)

在估計 PERT 的活動工時參數的研究中，進行測試七十八個數據的累積分配函數，做精簡的比較各個公式後，提出 EP-T 和 ES-M 這兩個公式比其他 PERT 公式可以更準確地在估計平均數和變異數，但儘管如此原始的 PERT 公式仍被廣泛的利用，它們的使用可能會造成較大的誤差在累積分配函數上對於項目完工時間是否在多個關鍵路徑上有正確的處理。EP-T 公式來自 Pearson & Turkey (1965)，ES-M 公式來自 Megill (1977)

表 1. 西元 1965 年~1992 年 PERT 公式來源

公式名稱	來源	備註
Original PERT formulas	-	僅限於古典假設：(1)固定變異數 (2)峯態為 3，皆成立的情況下
Modified PERT formulas	Buffa and Sarin 1987, Kerzner 1992 , Meredith and Mantel 1989	修改原始 PERT 公式的分位數 值，由 $x_{0.01}$ 和 $x_{0.99}$ 取代 $x_{0.0}$ 和 $x_{1.0}$
Troutt Formula for Mean	Troutt's (1989)	以眾數 ( $x_m$ ) 替代原始 PERT 公式 模型的中位數 $x_{0.5}$
Farnum-Stanton Formulas	Farnum & Stanton (1987)	
Golenko-Ginzburg Formulas	Golenko-Ginzburg (1988)	
Extend Person-Tukey	Pearson & Turkey (1965)	
Extend Swanson-Megill	Megill (1977)	

資料來源：本研究小組整理 (2009)

表 2. PERT 公式整理

公式名稱	平均數及變異數估計公式
Original PERT formulas	$\hat{\mu} = [x(0.0) + 4Xm + x(1.0)]/6$ $\hat{\sigma}^2 = ([x(1.0) - x(0.0)]/6)^2$
Modified PERT formulas	$\hat{\mu} = [x(0.01) + 4Xm + x(0.99)]/6$ $\hat{\sigma}^2 = ([x(0.99) - x(0.01)]/6)^2$
Troutt Formula for Mean	$\hat{\mu} = [x(0.0) + 4x(0.50) + x(1.0)]/6$ <p>Not Applicable</p>
Farnum-Stanton Formulas	$\hat{\mu} = 2/(2 + 1/Xm), Xm < 0.13$ $\hat{\sigma}^2 = X^2m(1 - Xm)/(1 + Xm), Xm < 0.13$
Golenko-Ginzburg Formulas	$\hat{\mu} = [2x(0.0) + 9Xm + 2x(1.0)]/3$ $\hat{\sigma}^2 = \frac{(x(1.0) - x(0.0))^2}{1268} \left[ 22 + 81 \frac{Xm - X(0.0)}{X(1.0) - X(0.0)} - 81 \left( \frac{Xm - X(0.0)}{X(1.0) - X(0.0)} \right)^2 \right]$
Extend Person-Tukey (EP-T)  Extend Swanson-Megill (ES-M)	$\hat{\mu} = 0.630x(0.50) + 0.185[x(0.05) + x(0.95)]$ $\hat{\sigma}^2 = 0.630 \left[ X(0.50) - \hat{\mu} \right]^2 + 0.185 \left( \left[ X(0.05) - \hat{\mu} \right]^2 + \left[ X(0.95) - \hat{\mu} \right]^2 \right)$ $\hat{\mu} = 0.400x(0.50) + 0.300[x(0.10) + x(0.90)]$ $\hat{\sigma}^2 = 0.400 \left[ X(0.50) - \hat{\mu} \right]^2 + 0.300 \left( \left[ X(0.10) - \hat{\mu} \right]^2 + \left[ X(0.90) - \hat{\mu} \right]^2 \right)$

資料來源：本研究小組整理（2009年）

表 3. PERT 公式誤差率比較

公式名稱	Approximation for Mean		Approximation for Variance	
	Maximum	Average Absolute	Maximum	Average Absolute
Original PERT formulas	0.14552 451%	0.05224 41.7%	0.02728 5506%	0.01768 549%
Modified PERT formulas	-0.03167 -11.6%	0.00634 3.19%	-0.02838 56.8%	0.0533 44.3%
Troutt Formula for Mean	0.15265 473%	0.06283 47.4%	Not Applicable	Not Applicable
Farnum-Stanton Formulas	0.11204 78.4%	0.03315 16.4%	0.02605 1511%	0.01316 254%
Golenko-Ginzburg Formulas	0.13313 413%	0.04677 37.7%	0.03125 3613%	0.01809 480%
Extend Person-Tukey	0.00015 0.07%	0.00004 0.02%	-0.00080 -1.6%	0.00006 0.5%
Extend Swanson-Megill	0.00103 0.33%	0.00012 0.05%	0.00552 11.1%	0.00042 2.7%

資料來源：Pearson & Turkey (1965)

(二)Lau, and Lau,. (1998)提到現實的隨機變數有著各式各樣不同的形狀分配，而現今 PERT 法所採用的 Beta 分配較無法全面的顯示。因此爲了能夠在更廣泛和現實的環境中所使用，針對改善標準差 ( $\sigma$ )的部分，提出簡單且更有意義具有高準確性的估計公式 (EL-L)。

當  $(x_{0.95} - x_{0.5}) > (x_{0.5} - x_{0.05})$ 時，則：

$$\sigma_e = 0.34(x_{0.95} - x_{0.5}) + 0.28(x_{0.5} - x_{0.05}) \quad (3)$$

若當  $(x_{0.95} - x_{0.5}) < (x_{0.5} - x_{0.05})$ 時，則：

$$\sigma_e = 0.28(x_{0.95} - x_{0.5}) + 0.34(x_{0.5} - x_{0.05}) \quad (4)$$

(三)Lau., A., Lau, H and Zhang, Y (1996)

Using six fractiles :

$$\sigma_e = 0.2(x_{0.99} - x_{0.5}) + 0.6(x_{0.9} - x_{0.1}) + 1.2(x_{0.75} - x_{0.25}) \quad (5)$$

Using four fractiles :

$$\sigma_e = 0.7(x_{0.9} - x_{0.1}) + 0.59(x_{0.75} - x_{0.25}) \quad (6)$$

表 4. EL-L、EP-T 與 Lau., A., Lau, H and Zhang, Y 的公式作誤差大小的比較

公式名稱	Average absolute percentage error	MSE	Maximum absolute percentage error
EL-L	1.3	$0.22 \times 10^{-3}$	$0.36 \times 10^{-1}$
EP-T	2.4	$0.76 \times 10^{-3}$	$0.50 \times 10^{-1}$
Lau(using six fractiles)	2.1	$0.76 \times 10^{-3}$	$0.80 \times 10^{-1}$
Lau(using four fractiles)	5.3	$0.32 \times 10^{-2}$	0.11

資料來源：Lau, H.S., Lau, A.H.L. (1998)

### 三、符號解釋定義

#### (一) 標準 Beta 分配

若隨機變數  $X$  具有參數  $\alpha > 0$ 、 $\beta > 0$  的「貝他分配」，記為  $X \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$ ，則  $X$  的「機率密度函數」：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0, & \alpha, \beta > 0 \end{cases} \quad (7)$$

#### (二) 一般化 Beta 分配( $\alpha, \beta, a, b$ )

$$X = \frac{Y - a}{b - a} \quad ; \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{(y - a)^{\alpha-1} (b - y)^{\beta-1}}{(b - a)^{\alpha+\beta-1}} & a < y < b \\ 0 & \alpha, \beta > 0 \\ & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

#### (三) 常態分配

若  $X$  具有「參數」為  $\mu$  及  $\sigma^2$  常態分配，通常記為  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，則  $X$  的機率密度函數：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}, \quad -\infty < Z < \infty \quad (9)$$

#### (四) Mathematica

是一套科學計算的軟體，最初由美國的 Wolfram Research 公司於 1988 年發展出來，可用來計算物理、數學、電機、太空科學等領域的問題。現已成為數學計算方面不可或缺的必備軟體。它的語法簡單且功能強大，大大的節省了運算和研究時間。

其主要的功能有：

1. 數學上的符號運算和數值運算：符號運算包括一因式分解、一般代號運算（如輸入  $[X+1]^2$  則可得到  $(X^2+2X+1)$ 、部份分式、符號式解微分方程、不定積分（如求和  $(\Sigma)$ ）、

- Laplace transform 和 Inverse Laplace transform、求根、求極限值等等。
2. 矩陣的運算，雖然矩陣的運算很多軟體都辦的到，但 Mathematica 所使用的方法則較為簡單。
  3. 數值的分析
  4. 可程式化：也就是可以把多行的 Mathematica 指令整合成一個程式。
  5. 可畫出 2D 和 3D 的數理圖形。Mathematica 整合了數值、符號和圖形，使得計算函數或數字的工作變的簡單。
  6. 口語化的語言。

## 參、研究目的與方法

### 一、研究目的

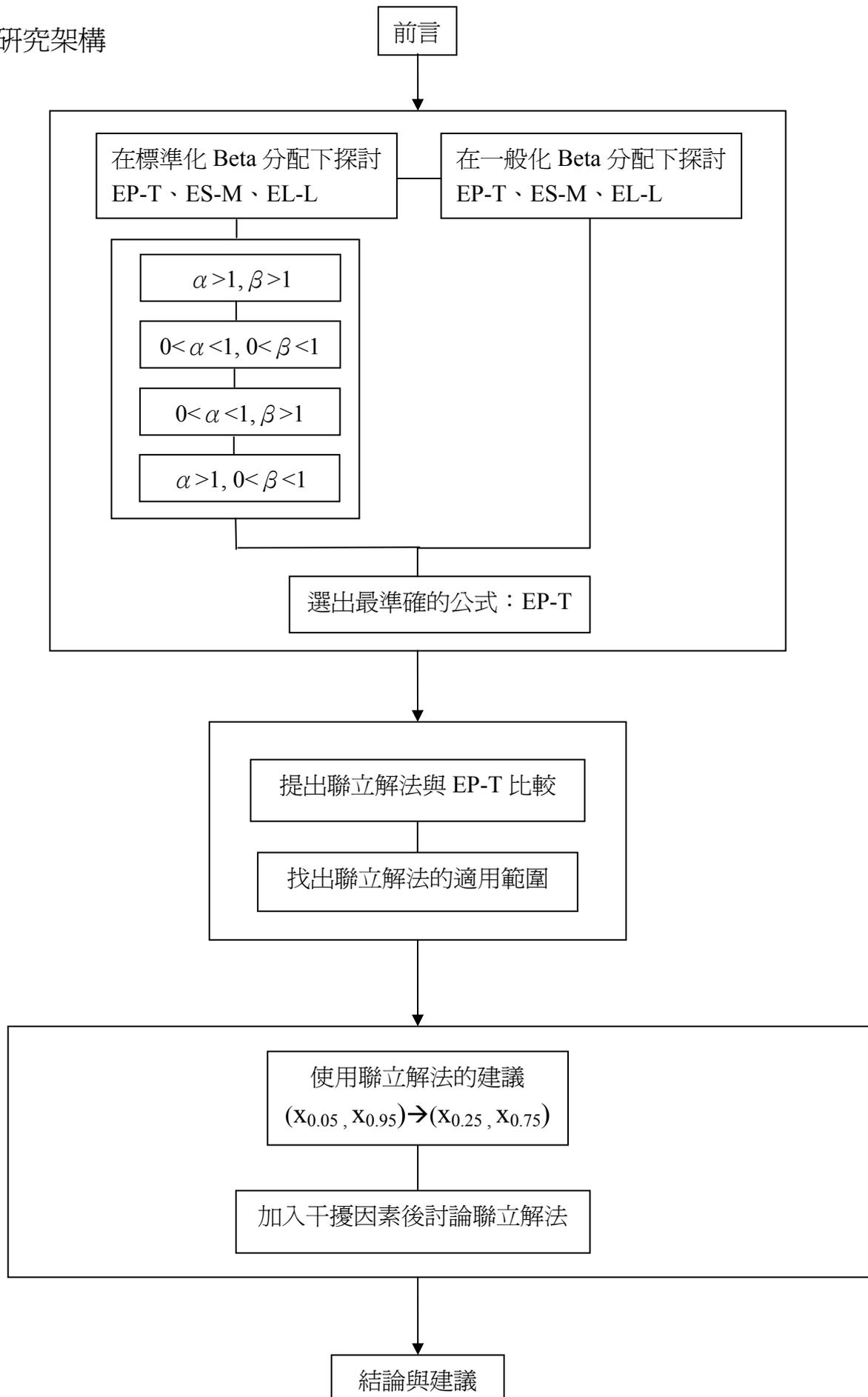
針對文獻探討中前人所提出的 PERT 法來討論，EP-T、ES-M、EL-L 公式是目前較精準也常被討論的幾個公式。為能有效利用 PERT 法來提升專案排程的準確，同時降低工時估計的不確定性程度，希望透過模擬實驗以找出最穩定精確的估計方法。

在標準化 Beta 分配與一般化 Beta 分配下，模擬實務上經由專家意見所得到的百分位數值，搭配 Mathematica 電腦軟體中的 FindRoot 指令進行數值分析，套用 EP-T、ES-M、EL-L 公式運算，將實驗結果用圖表解析出適用情況及優缺點，找出其中較穩定、準確的公式，此部份詳細說明在第肆章第一節介紹。

本章第一段提到的這些公式只在古典假設成立時適用，但實務上工時估計並無法完全滿足古典假設，在這種情形下使用公式法便不能達到理論的準確度，因此我們找出不需公式的估計方法，利用百分位數搭配電腦軟體，發展出「聯立解法 (NEW)」，經多次實驗評估此方法的準確度及穩定度，將其與公式法比較分析，以證明「聯立解法」有較大的適用性，並為它歸納出適用範圍，使它運用起來更加方便，此部份將在第肆章第二節中詳細說明。

在前人文獻中指出，專家意見法受到人為心理因素的影響，估計較集中的百分位數時會較準確，因此我們改變百分位數的假設，使得「聯立解法」的運用能更加準確。為使「聯立解法」能更有效的被廣泛運用，仍需作更進一步的探討，在專家給予意見時加入專家知識及不確定性因素的干擾後，檢視是否依然保有最佳的準確度。重複前段文章中的實驗方法，找出誤差最小最穩定的情況。我們將在第肆章第三節中詳細敘述實驗過程與結論。

## 二、研究架構



## 肆、實驗與探討

工時估計實務上的運用，是在一般化 Beta 分配下，利用專家意見給我們  $(p_1, p_2)$  機率相對應的  $(y_{p_1}, y_{p_2})$ ，將其換算成標準化 Beta 分配下的  $(x_{p_1}, x_{p_2})$ ，再利用它估計平均數  $(\hat{\mu})$  與變異數  $(\hat{\sigma}^2)$ 。在標準 Beta 分配下， $(x_{p_1}, x_{p_2})$  介於 0 和 1 之間，求這兩個數值求滿足於公式 (10) 的  $(\alpha, \beta)$  參數，進而算出  $\hat{\mu}$  及  $\hat{\sigma}^2$ ，在本篇文章中皆在標準化 Beta 分配下討論前人提出的工時估計公式。

### 一、標準化 Beta 分配與一般化 Beta 分配下探討 EP-T、ES-M、EL-L

根據 Donald L. Keefer, William A. Verdini (1993)，所提及的許多估計  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$  公式，其中作者較推崇 EP-T 與 ES-M 公式，並在比較後提出 EP-T 優於 ES-M 的論點。為了驗證此一論點，我們模仿作者的實驗方式，先假設  $(\alpha, \beta)$  兩個參數，用數值分析方法進行百分位數的運算，套用 EP-T 與 ES-M 公式分別求出  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ ，並在標準 Beta 分配下求得的  $(\mu, \sigma^2)$  作比較，探討兩公式的「準確度」。準確度是指  $(\mu, \sigma^2)$  與  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$  之間的誤差大小。但在 Keefer & Verdini (1993) 中，只討論了  $[\alpha > 1, \beta > 1]$  的情況，並沒有討論到不同情況的  $(\alpha, \beta)$  是否有一樣的結果，於是我們將假設不同的  $(\alpha, \beta)$  範圍 ( $[0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1]$ 、 $[0 < \alpha < 1, \beta > 1]$  及  $[\alpha > 1, 0 < \beta < 1]$ )，來比較出 EP-T 與 ES-M 之間的優劣。又根據 Lau, H.S., Lau, A.H.L. (1998) 指出，前人的變異數估計公式在  $(\alpha, \beta)$  皆小於 1 時不是很完善，對此提出了一個改善標準差的公式 EL-L，我們將重複實驗來驗證 EL-L 是否比 EP-T 與 ES-M 適用。接著延申探討一般化 Beta 分配下，增加兩個參數  $(a, b)$ ，經過推導得到三個公式 (10) (11) (12)，再由這三個公式推導可得到公式 (13)，且  $y_{p_i}$  介於  $a$  與  $b$  之間。套用 EP-T 與 ES-M 公式分別求出  $(\mu, \sigma^2)$  與  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ ，看是否會影響其準確度。

$$y_i = a + x_i(b - a), \quad (10)$$

$$\mu_y = a + \mu_x(b - a), \quad (11)$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2(b - a)^2, \quad (12)$$

$$x_{p_1} = \frac{y_{p_1} - a}{b - a} \quad (13)$$

(一) 實驗

1. 仿照 Keefe&Verdini (1993)假設  $(\alpha, \beta)$ 分別為 2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,30,60，安裝 Mathematica 軟體，利用 Find Root 指令進行數值分析，找出每一組  $(\alpha, \beta)$ 的五個百分位數  $x_{p_1}$  ( $x_{0.05}$ 、 $x_{0.25}$ 、 $x_{0.5}$ 、 $x_{0.75}$ 、 $x_{0.95}$ )，再依作者提出的 EP-T 及 ES-M 公式分別估計出  $\hat{\mu}_{EP-T}$ 、 $\hat{\sigma}^2_{EP-T}$ 、 $\hat{\mu}_{ES-M}$  及  $\hat{\sigma}^2_{ES-M}$ ；

$$\text{EP-T : } \hat{\mu} = 0.63 x_{0.5} + 0.185(x_{0.05} + x_{0.95}) \quad (14)$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.63(x_{0.5} - \hat{\mu})^2 + 0.185 \left[ (x_{0.05} - \hat{\mu})^2 + (x_{0.95} - \hat{\mu})^2 \right] \quad (15)$$

$$\text{ES-M : } \hat{\mu} = 0.4 x_{0.5} + 0.3(x_{0.1} + x_{0.9}) \quad (16)$$

$$\hat{\sigma}^2 = 0.4(x_{0.5} - \hat{\mu})^2 + 0.3 \left[ (x_{0.1} - \hat{\mu})^2 + (x_{0.9} - \hat{\mu})^2 \right] \quad (17)$$

另外利用標準 Beta 分配的  $\mu$  及  $\sigma^2$  公式 (18) (19)，求出標準  $(\mu, \sigma^2)$ 。將  $(\mu, \sigma^2)$  與  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$  分別相減，計算出估計值與標準值之間的最大誤差 Errors (max)、平均誤差 Errors (average) 及最大誤差百分比 Errors (max, percentage)、平均誤差百分比 Errors (average, percentage)，進而比較其大小。

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (18)$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \quad (19)$$

由表 5 來看，顯示出  $(\hat{\mu}_{EP-T}, \hat{\sigma}^2_{EP-T})$  分別的 Errors (max, percentage) 及 Errors (average, percentage)，皆小於  $(\hat{\mu}_{ES-M}, \hat{\sigma}^2_{ES-M})$ ，因此得到一個結論：在工時估計中，使用 EP-T 方法在理論上較 ES-M 精準，此結論符合 Keefe&Verdini (1993) 的論點。

表 5.標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析-[ $\alpha>1,\beta>1$ ]

誤差比率		EP-T	ES-M
$\hat{\mu}$	Errors(average,percentage)	0.01789%	0.04981%
	Errors(max,percentage)	-0.07278%	-0.32869%
$\hat{\sigma}^2$	Errors(average,percentage)	0.456%	2.648%
	Errors(max,percentage)	1.6%	-11.045%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

但作者也提到實務上人為在作樂觀及悲觀工時的估計時，會受許多因素影響，實務上或許 ES-M 會優於 EP-T，但由於時間關係這部分暫不討論，留待後人去研究，在此篇文章中僅針對理論作深入的探討。

2. 假設  $(\alpha, \beta)$  分別為 0.1,0.3,0.5,0.7,0.9，進行上述實驗。由表 6 可看出 Errors ( $\hat{\mu}_{EP-T}$ ) 較小於 Errors ( $\hat{\mu}_{ES-M}$ )，但 Errors ( $\hat{\sigma}_{ES-M}^2$ ) 卻小於 Errors ( $\hat{\sigma}_{EP-T}^2$ )，且兩者的誤差值皆很大，由此可見，EP-T 公式在  $[0<\alpha<1, 0<\beta<1]$  的情況下，估計平均數時仍有比 ES-M 較高的準確度，但在估計變異數時便不穩定。雖然  $\hat{\mu}_{EP-T}$  較精準於  $\hat{\mu}_{ES-M}$ ，但誤差卻稍微高了一點，數據顯示 Errors ( $\hat{\mu}_{EP-T}, \max, \text{percentage}$ ) 達到了 23.35%，Errors ( $\hat{\sigma}_{ES-M}^2, \max, \text{percentage}$ ) 也有 28%，按照這樣的誤差比率來看，EP-T 及 ES-M 皆不適用於  $[0<\alpha<1, 0<\beta<1]$  的情況。

表 6.標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析-[ $0<\alpha<1, 0<\beta<1$ ]

誤差比率		EP-T	ES-M
$\hat{\mu}$	Errors(average,percentage)	6.35%	7.98%
	Errors(max,percentage)	23.35%	-32.71%
$\hat{\sigma}^2$	Errors(average,percentage)	25.47%	17.97%
	Errors(max,percentage)	55.60%	28.00%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

3. 假設  $\alpha$  為 0.1,0.3,0.5,0.7,0.9， $\beta$  為 2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,30,60，進行上述實驗。由表 7 顯示，Errors ( $\hat{\mu}_{EP-T}, \max, \text{percentage}$ ) 高達 -19.42%，並大於 Errors ( $\hat{\mu}_{ES-M}, \max, \text{percentage}$ )；Errors ( $\hat{\sigma}_{EP-T}^2, \max, \text{percentage}$ ) 雖小於 Errors ( $\hat{\sigma}_{ES-M}^2, \max, \text{percentage}$ )，但也高達 47.91%，這樣的誤差值非常大，可看出在  $[0<\alpha<1, \beta>1]$  的情況下，不適用 ES-M，且 EP-T 精準度也顯得相當不穩定。

表 7.標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析-[ $0 < \alpha < 1, \beta > 1$ ]

誤差比率		EP-T	ES-M
$\hat{\mu}$	Errors(average,percentage)	2.54%	4.16%
	Errors(max,percentage)	-19.42%	19.36%
$\hat{\sigma}^2$	Errors(average,percentage)	10.40%	33.08%
	Errors(max,percentage)	47.91%	84.68%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

4. 假設  $\alpha$  為 2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,30,60， $\beta$  為 0.1,0.3,0.5,0.7,0.9，進行上述實驗。由表 8 顯示，Errors ( $\hat{\mu}_{EP-T}$ )及 Errors ( $\hat{\sigma}^2_{EP-T}$ )皆小於 ES-M，但 Errors ( $\hat{\sigma}^2_{EP-T, \max, percentage}$ )到達了 -20.32%，誤差仍然太大。

表 8.標準化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析-[ $\alpha > 1, 0 < \beta < 1$ ]

誤差比率		EP-T	ES-M
$\hat{\mu}$	Errors(average,percentage)	0.07%	0.21%
	Errors(max,percentage)	0.97%	1.06%
$\hat{\sigma}^2$	Errors(average,percentage)	10.40%	33.08%
	Errors(max,percentage)	-20.32%	65.65%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

根據表 8 的數據可看出，理論上在  $(\alpha, \beta)$  皆大於 1 的情況下，使用 EP-T 公式來估計是很穩定準確的，但在  $(\alpha, \beta)$  皆小於 1 或其中之一有小於 1 的情況下，EP-T 公式即變得很不可靠，出現相當大的誤差值，因此，在這樣的情況下 EP-T 及 ES-M 皆不適用。

5. Lau & Lau (1998) 文章中只針對改善標準差 ( $\sigma$ ) 的部分作深入探討，提出了一組改善標準差的 EL-L 公式 (3) (4)，EL-L 與 EP-T 估計  $\hat{\sigma}^2$  的方式有所不同，EP-T 是先估計出  $\hat{\mu}$ ，再將其值帶入 (15) 公式估計  $\hat{\sigma}^2$ ，因此其準確度會受到  $\hat{\mu}$  的影響；在 EL-L 的部份則是直接估計出  $\hat{\sigma}_{EL-L}$ ，再將其平方求得  $\hat{\sigma}_{EL-L}^2$ ，因此不受平均數的影響。

為了比較 EL-L 與 EP-T 公式，我們仿照上述實驗所假設的  $(\alpha, \beta)$  數值 ( $[\alpha > 1, \beta > 1]$ 、 $[0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1]$ 、 $[0 < \alpha < 1, \beta > 1]$  及  $[\alpha > 1, 0 < \beta < 1]$ )，找出分位數代入 EL-L 公式估計出  $\hat{\sigma}_{EL-L}^2$ ，並計算出與標準值之間的誤差 (errors)。

由實驗數據可看出，在  $[0 < \alpha < 1, \beta > 1]$  及  $[\alpha > 1, 0 < \beta < 1]$  這兩種情況下，EP-T 準確度比 EL-L 相對較高，但誤差值非常的大。而在  $(\alpha, \beta)$  皆小於 1 的情況下，比較起來 EL-L 相對較好，但其誤差明顯還是太大 (表 10)。因此，可得到一個結論， $(\alpha, \beta)$  皆大於 1 時可使用 EP-T，但在這個範圍之外，兩者皆不適用。

表 9. 標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析-[ $\alpha > 1, \beta > 1$ ]

誤差比率	EP-T	EL-L
Errors (average, percentage)	0.46%	5.01%
Errors (max, percentage)	1.60%	6.10%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

表 10. 標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析[ $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ ]

誤差比率	EP-T	EL-L
Errors (average, percentage)	25.47%	17.13%
Errors (max, percentage)	55.60%	53.87%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

表 11. 標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析[ $0 < \alpha < 1, \beta > 1$ ]

誤差比率	EP-T	EL-L
Errors (average, percentage)	10.40%	17.06%
Errors (max, percentage)	47.91%	60.01%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

表 12. 標準化 Beta 分配 EP-T 與 EL-L 誤差比率分析[ $\alpha > 1, 0 < \beta < 1$ ]

誤差比率	EP-T	EL-L
Errors (average, percentage)	10.40%	17.06%
Errors (max, percentage)	47.91%	60.01%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

6. 仿照上述實驗的假設  $(\alpha, \beta) = (2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 60)$ 。在標準化 Beta 分配下，找出每一組  $(\alpha, \beta)$  的五個分位數  $x_{p_1}$  ( $x_{0.05}$ 、 $x_{0.25}$ 、 $x_{0.5}$ 、 $x_{0.75}$ 、 $x_{0.95}$ )，令參數  $(a, b) = (20, 80)$ ，將  $x_{p_1}$  經過公式 (13) 轉化得到  $y_{p_1}$ 。將  $y_{p_1}$  代入 EP-T 與 ES-M 估計出  $\hat{\mu}_{EP-T}$ 、 $\hat{\sigma}_{EP-T}^2$ 、 $\hat{\mu}_{ES-M}$ 、 $\hat{\sigma}_{ES-M}^2$ ；利用公式 (18) (19) 求得  $\mu$ 、 $\sigma^2$  及誤差值。

在比較後顯示在一般化 Beta 分配之下進行估計，EP-T 的誤差值小於 ES-M 的誤差值。在與表 5 比較後可看出，不論是標準 Beta 分配或一般化 Beta 分配，EP-T 皆比 ES-M 來的準確。

表 13. 一般化 Beta 分配 EP-T 與 ES-M 誤差比率分析

誤差比率		EP-T	ES-M
$\hat{\mu}$	Errors (average, percentage)	0.0063%	0.02%
	Errors (max, percentage)	-0.0263%	-0.154%
$\hat{\sigma}^2$	Errors (average, percentage)	0.456%	2.648%
	Errors (max, percentage)	1.6%	-11.045%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

## (二) 結論與討論

有許多前人針對 PERT 法提出他們認為最可靠的公式 EP-T、ES-M、EL-L，但它還是有一些無法避免的缺失，就是它們都只適用在某個特定的範圍內，在很多的情況下並不適用。我們依據這樣的特性歸納出一個結論，當  $(\alpha, \beta)$  皆大於 1 時，我們建議使用 EP-T 公式來作運算會比 ES-M 來得準確，而在  $(\alpha, \beta)$  皆小於 1 時，則建議使用 EL-L 公式。但是，若  $(\alpha, \beta)$  在上述兩種情況以外時，這三個公式就都不適用。因此，我們將在下節提出一個能完全適用在實際情況下的「聯立解法」，並以實驗來驗證其準確度與適用範圍。

## 二、 聯立解法

本節將提出一個全新的數值計算方法，此方法稱為聯立解法 (NEW)，是我們經由實驗探討後，歸納出一種運用在 Mathematica 軟體裡的數值計算方法。為驗證該方法的準確性及適用範圍，一開始先計算  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  並估計出  $\hat{\mu}_{NEW}$  及  $\hat{\sigma}^2_{NEW}$ ，再與 EP-T 做比較，以了解聯立解法是否優於 EP-T。若聯立解法比 EP-T 更準確，將進一步更廣泛的比較  $(\alpha, \beta)$  參數範圍，來歸納出其適用的範圍，藉由逐一檢測，為聯立解法整理出一個規律，了解分別在什麼樣的  $(\alpha, \beta)$  範圍下最為適用，加以提高聯立解法在整個專案工時估計的實用性

### (一) 實驗

1. 仿照 Donald L. Keefer, William A. Verdini (1993) 假設的  $(\alpha, \beta)$  參數範圍  $[\alpha > 1, \beta > 1]$  下，重複第一節的實驗步驟，使用數值分析求出  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  數值，並代入聯立解法估計出  $\hat{\alpha}_{NEW}$  及  $\hat{\beta}_{NEW}$ ，進一步使用標準 Beta 分配求出  $\hat{\mu}_{NEW}$ 、 $\hat{\sigma}^2_{NEW}$ 。再將  $(\hat{\mu}_{NEW}, \hat{\sigma}^2_{NEW})$  與  $(\mu, \sigma^2)$  分別相減，計算出  $\hat{\mu}_{NEW}$ 、 $\hat{\sigma}^2_{NEW}$  的 Errors，與  $(\hat{\mu}_{EP-T}, \hat{\sigma}^2_{EP-T})$  求出的 Errors 分別比較其誤差的大小，看出使用聯立解法跟 EP-T 何者的準確度較高。

在實驗過程中，發現使用數值分析方法會出現兩種收斂問題，我們歸納其兩種收斂問題如下：

收斂問題一：由假設的  $\alpha$ 、 $\beta$  參數進行數值分析，計算  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  時出現的收斂問題。

收斂問題二：在沒有收斂問題一的情況下，進而估計  $\hat{\alpha}$  及  $\hat{\beta}$  時所發生的收斂問題。

由於本實驗中無法有效的排除收斂問題一的情況，且計算的數據有限，因此無法精確找出可能發生收斂問題二的範圍，在此只探討聯立解法是否優於 EP-T。除非完全排除收斂問題一的情況，才能精確找出可能發生的收斂範圍；目前只能推測當  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  兩個數值很接近時，可能會發生收斂問題二，並導致在估計  $\hat{\mu}$  及  $\hat{\sigma}^2$  時，會出現明顯的誤差。

至於要明確找出發生收斂問題二的範圍，可能要更進一步擴大演算的參數範圍，並排除收斂問題一的情況，才能精確找出可能收斂的範圍，以提高整個實驗結果的可靠性，這個部份在下一個步驟將會進行探討。

此實驗結果顯示當使用聯立解法估計數值有收斂上的問題時，這些問題可能會影響最終結果的準確性，因此收斂上的問題如果無法有效地改善，結果並不是很適用於全部的情況，倘若能完全排除部分收斂上的問題，則聯立解法將比 EP-T 公式更適用，也能明顯降低估計  $\hat{\mu}$  及  $\hat{\sigma}^2$  上的誤差 (如表 14)。

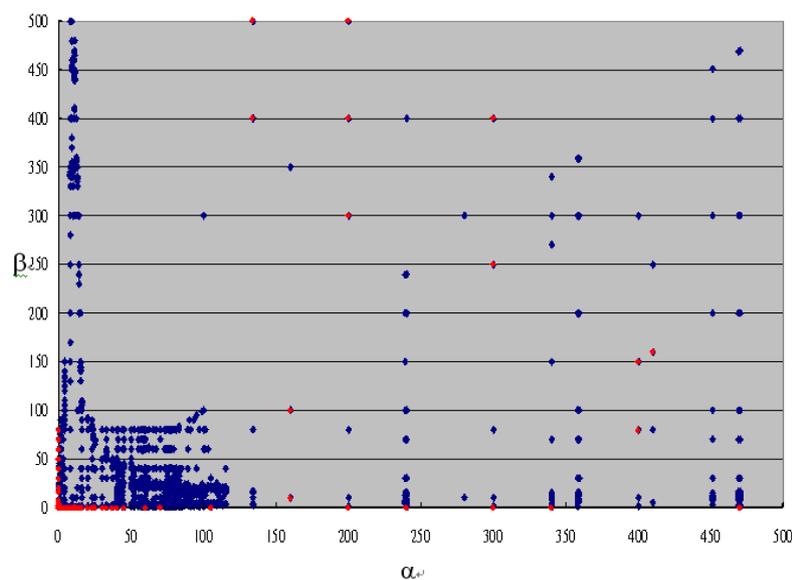
表 14. 聯立解法與 EP-T 誤差比率分析-[ $\alpha>1, \beta>1$ ]

誤差比率		EP-T	NEW (有收斂問題)	NEW(排除收斂問題)
$\hat{\mu}$	Errors(average,percentage)	0.01789%	0.06008%	0.00011%
	Errors(max,percentage)	-0.07278%	-3.15561%	0.00045%
$\hat{\sigma}^2$	Errors(average,percentage)	0.45597%	0.99024%	0.00024%
	Errors(max,percentage)	1.6%	-47.91543%	0.00115%

資料來源：本研究小組實驗整理 (2009)

2. 根據上述結果顯示，聯立解法在假設的  $(\alpha, \beta)$  參數範圍 [ $\alpha>1, \beta>1$ ]，估計數值可能會有收斂上的問題，這個問題將提高聯立解法的不確定性，為提高準確度，我們將延伸上述步驟，擴大不同  $(\alpha, \beta)$  參數範圍 ( $[\alpha<1, \beta<1]$ 、 $[\alpha\geq 1, 0<\beta\leq 1]$ 、 $[0<\alpha\leq 1, \beta\geq 1]$ )，並假設  $(\alpha, \beta)$  可能參數分別  $\{0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\sim 470\}$ ，再次進行數值分析，先使用 Mathematica 計算出  $x_{0.05}$  及  $x_{0.95}$  數值，再代入聯立解法估計  $\hat{\alpha}$  及  $\hat{\beta}$ ，與原先所假設的  $(\alpha, \beta)$  參數兩者做比較，看出是否有明顯的收斂誤差，並驗算聯立解法在不同  $\alpha$ 、 $\beta$  參數範圍下可能適用的範圍情況。

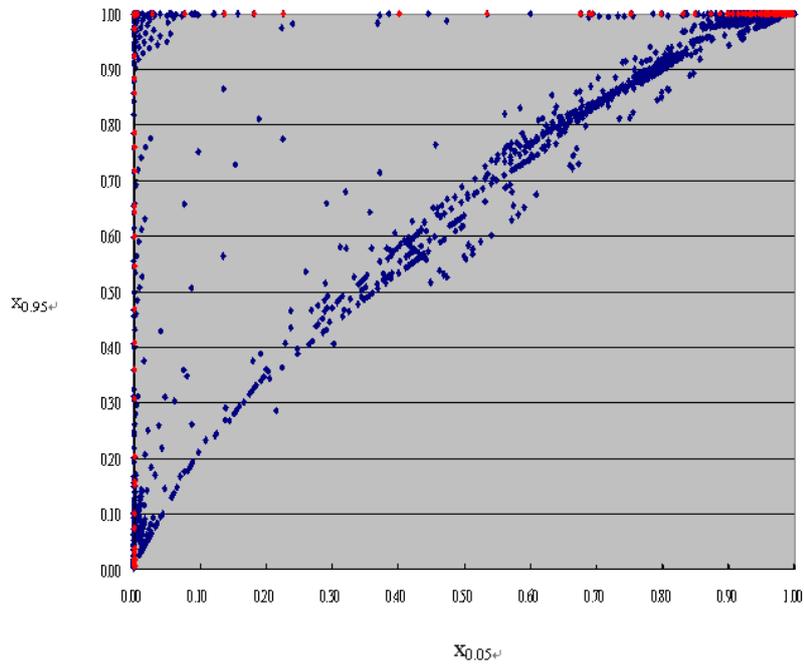
在實驗過程中，我們歸納其收斂情形並畫出兩種可能收斂問題的圖形如下圖 (紅點即代表收斂問題的部分)。圖 1 與圖 2 為收斂問題一在所有  $(\alpha, \beta)$  參數範圍下的  $[\alpha, \beta]$  及  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$



分佈情形。圖 1 可看出當  $\alpha$  或  $\beta$  其中一個小於 1 的情況下，將會出現收斂問題。

資料來源：本研究小組 (2009)

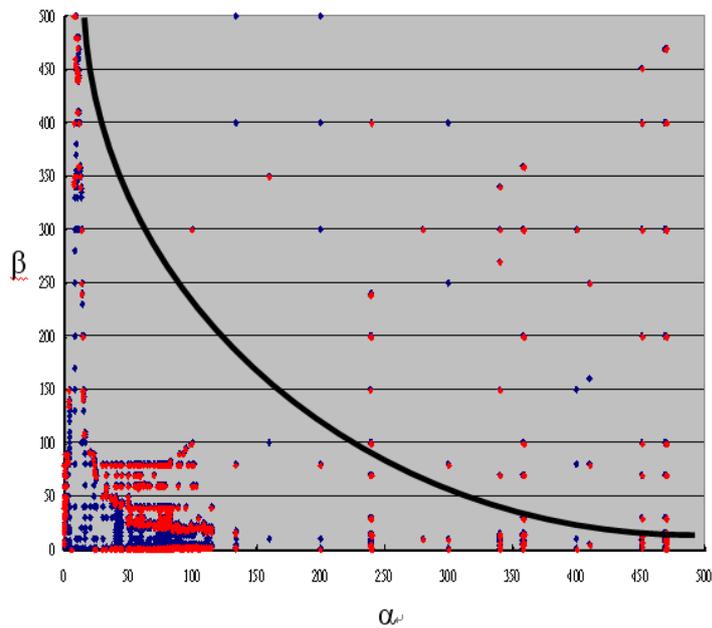
圖 2. 收斂問題一 $(\alpha, \beta)$ 分佈圖



資料來源：本研究小組 (2009)

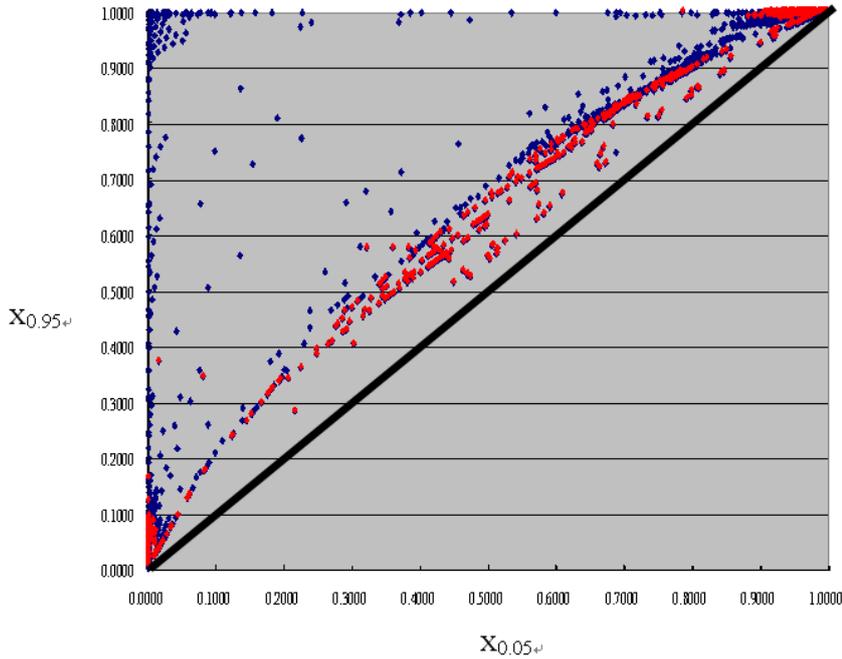
圖 3. 收斂問題一 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈圖

圖 3 與圖 4 為收斂問題一在所有  $(\alpha, \beta)$  參數範圍下的  $[\alpha, \beta]$  及  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  分佈情形。由圖 3 中可看出收斂問題二呈現出一個負斜率的反曲線圖形，且最適用範圍為  $\alpha, \beta$  皆介於 0 到 50 這塊小方塊之中，當  $\alpha=50$  開始往右邊增加時， $\beta$  可適用的範圍將會隨著  $\alpha$  的增大而減少；反之當  $\beta=50$  開始向上增加時，則  $\alpha$  可適用的範圍將會隨著  $\beta$  增大而減少。而圖 4 可看出收斂問題二於  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  圖形上大多接近於  $x_{0.05} = x_{0.95}$  這條對角線上，且呈現一個圓弧形狀偏離對角線。



資料來源：本研究小組 (2009)

圖 4. 收斂問題二( $\alpha, \beta$ )分佈圖

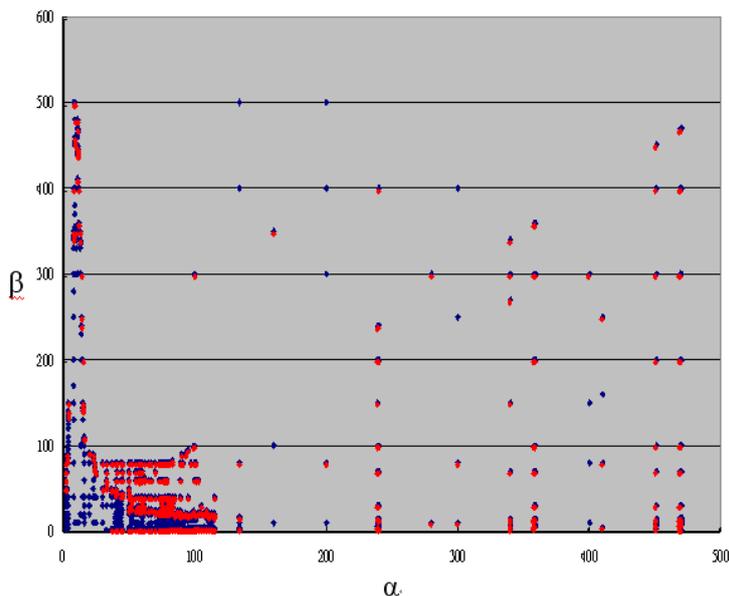


資料來源：本研究小組 (2009)

圖 5. 收斂問題二( $x_{0.05}, x_{0.95}$ )分佈圖

爲了更了解聯立解法在不同  $(\alpha, \beta)$  參數範圍下其適用的情形，我們把不同  $(\alpha, \beta)$  參數範圍放大來看，進而探討不同  $(\alpha, \beta)$  參數範圍在  $[\alpha, \beta]$ 、 $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  兩種圖形上相對應的關係以及收斂問題二所出現的區域。

圖 5、圖 6 爲  $(\alpha, \beta)$  參數範圍  $[\alpha > 1, \beta > 1]$  分別在  $[\alpha, \beta]$  及  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  分佈的情形。由圖 5 對應到圖 6，可看出參數範圍  $[\alpha > 1, \beta > 1]$  在  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  圖中， $x_{0.05}$  與  $x_{0.95}$  將落在趨近於對角線  $x_{0.05} = x_{0.95}$  附近的區域；至於收斂問題則出現在接近於  $x_{0.05} = x_{0.95}$  這條對角線上，且呈現一個圓弧形狀偏離對角線。



資料來源：本研究小組 (2009)

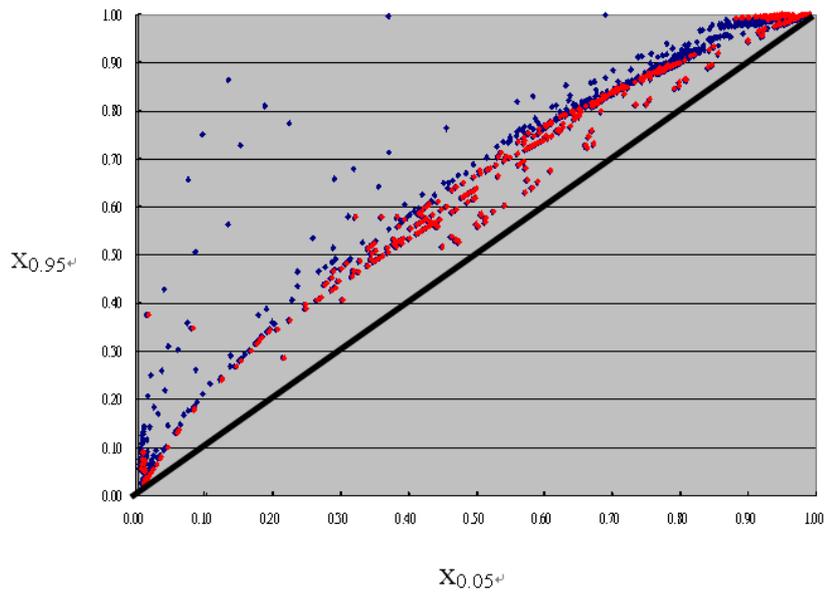
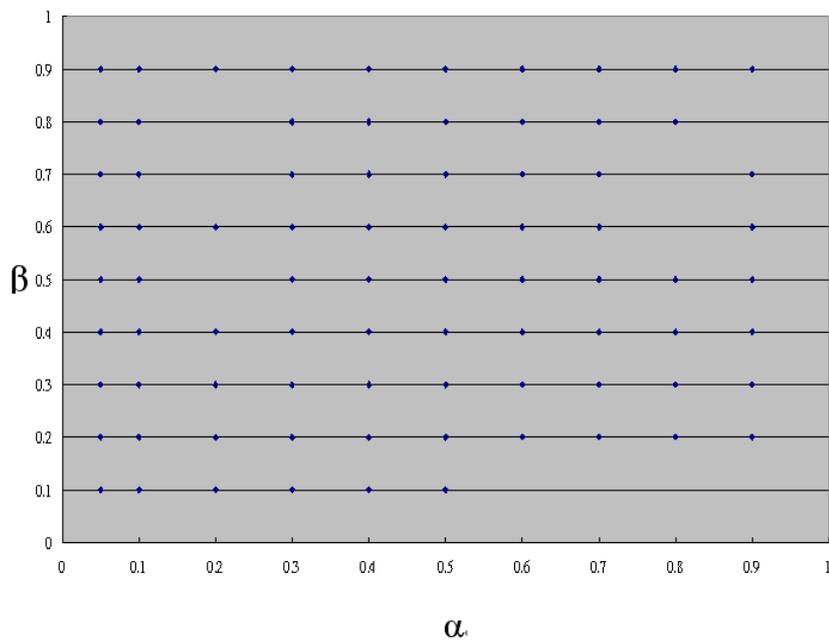


圖 6. 收斂問題二( $\alpha, \beta$ )分佈圖-[ $\alpha > 1, \beta > 1$ ]

資料來源：本研究小組 (2009)

圖 7. 收斂問題二( $x_{0.05}, x_{0.95}$ )分佈圖-[ $\alpha > 1, \beta > 1$ ]

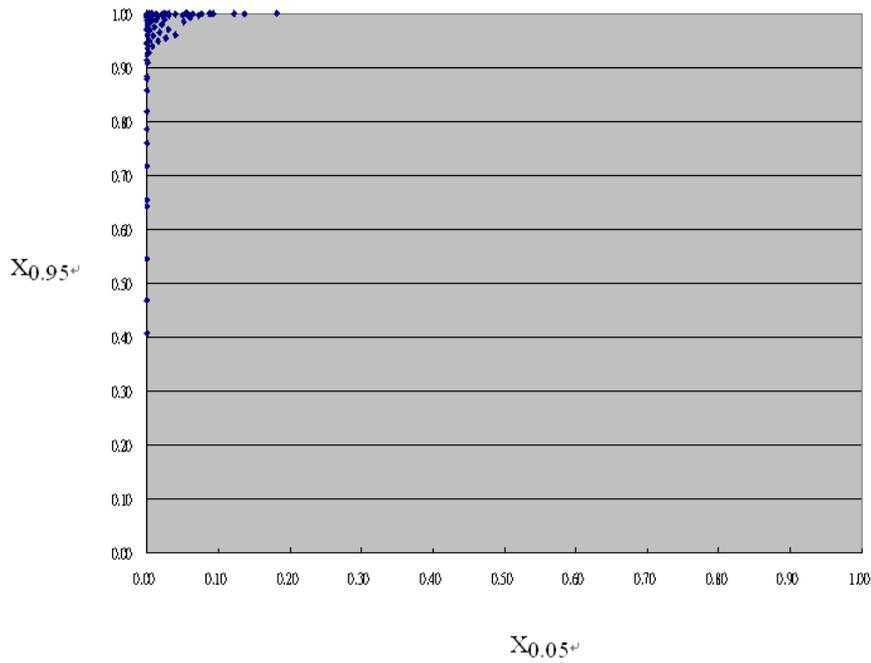
圖 7、圖 8 為  $(\alpha, \beta)$  參數範圍  $[\alpha < 1, \beta < 1]$  分別在  $[\alpha, \beta]$  及  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  分佈的情形。由圖 7 對應到圖 8，可看出參數範圍  $[\alpha < 1, \beta < 1]$  在  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  圖中， $x_{0.05}$  將落在趨近於 0，且  $x_{0.95}$  趨近於 1 的區域；然而在圖 8 可看出在參數範圍  $[\alpha < 1, \beta < 1]$  時並不會有收斂問題二。



資料來源：本研究小組 (2009)

圖 8. 收斂問題二( $\alpha, \beta$ )分佈圖-[ $\alpha < 1, \beta < 1$ ]

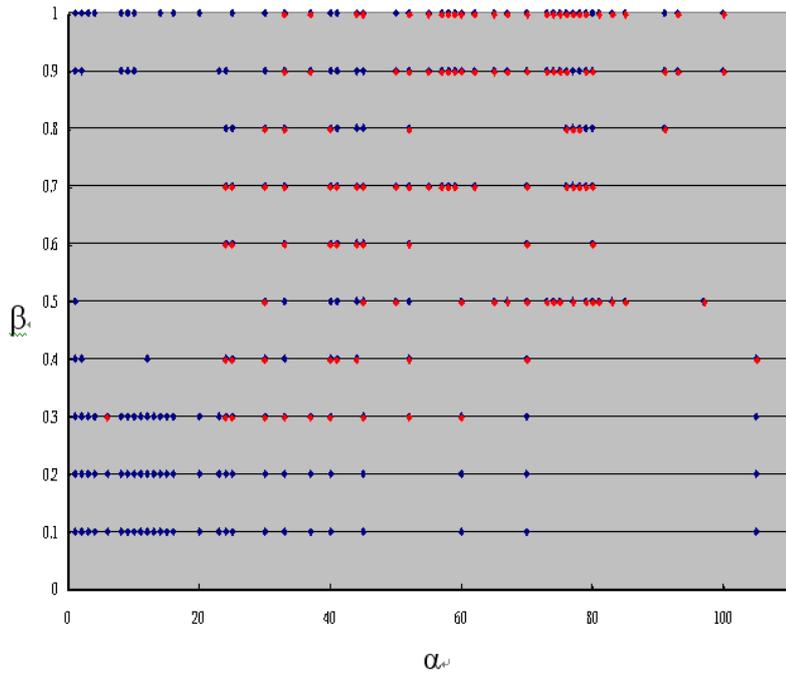




資料來源：本研究小組 (2009)

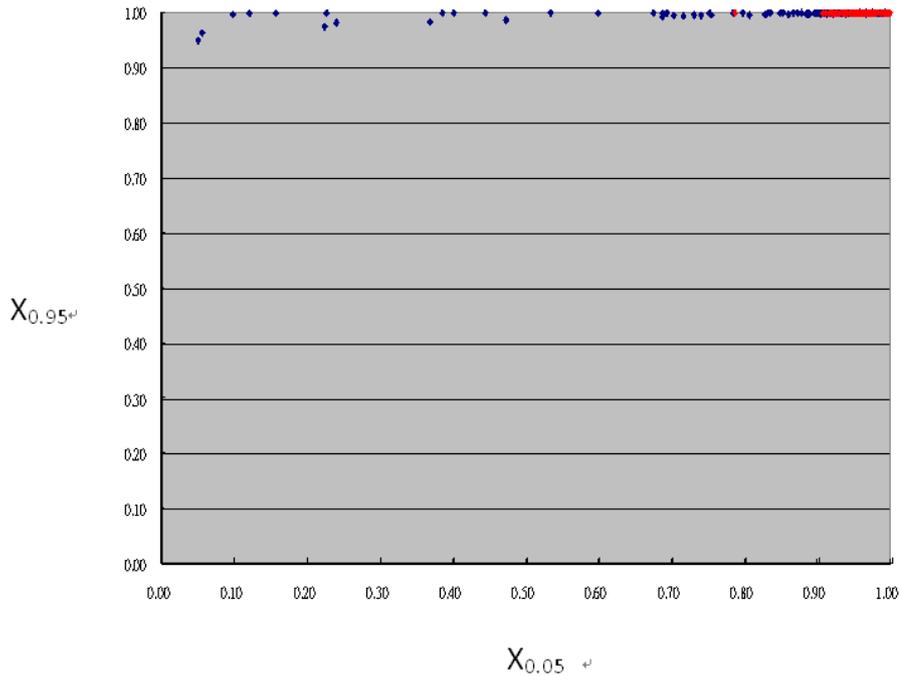
圖 9. 收斂問題二 ( $x_{0.05}, x_{0.95}$ ) 分佈圖- $[\alpha < 1, \beta < 1]$

圖 9、圖 10 為  $(\alpha, \beta)$  參數範圍  $[\alpha \geq 1, 0 < \beta \leq 1]$  分別在  $[\alpha, \beta]$  及  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  分佈的情形。由圖 9 對應到圖 10 可看出參數範圍  $[\alpha \geq 1, 0 < \beta \leq 1]$  在  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  圖中， $x_{0.05}$  將落在 0 與 1 之間，而  $x_{0.95}$  會落在趨近於 1 的區域；至於收斂問題則會出現在  $x_{0.05}$  與  $x_{0.95}$  皆趨近於 1 的區域 (右上角)。



資料來源：本研究小組 (2009)

圖 10. 收斂問題二( $\alpha, \beta$ )分佈圖-[ $\alpha \geq 1, 0 < \beta \leq 1$ ]

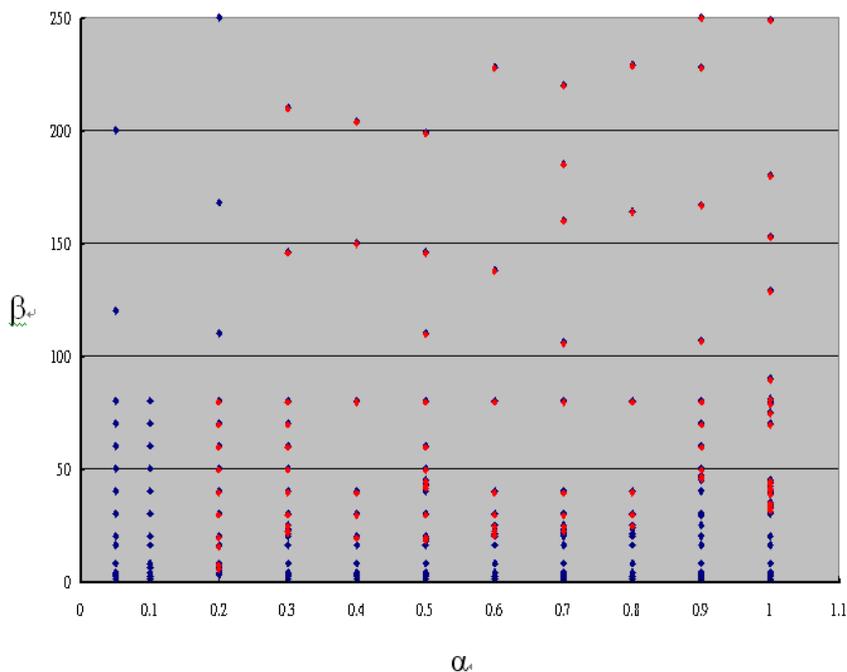


資料來源：本研究小組 (2009)

圖 11. 收斂問題二( $x_{0.05}, x_{0.95}$ )分佈圖-[ $\alpha \geq 1, 0 < \beta \leq 1$ ]

圖 11、圖 12 為  $(\alpha, \beta)$  參數範圍  $[0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 1]$  分別在  $[\alpha, \beta]$  及  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  分佈的情形。

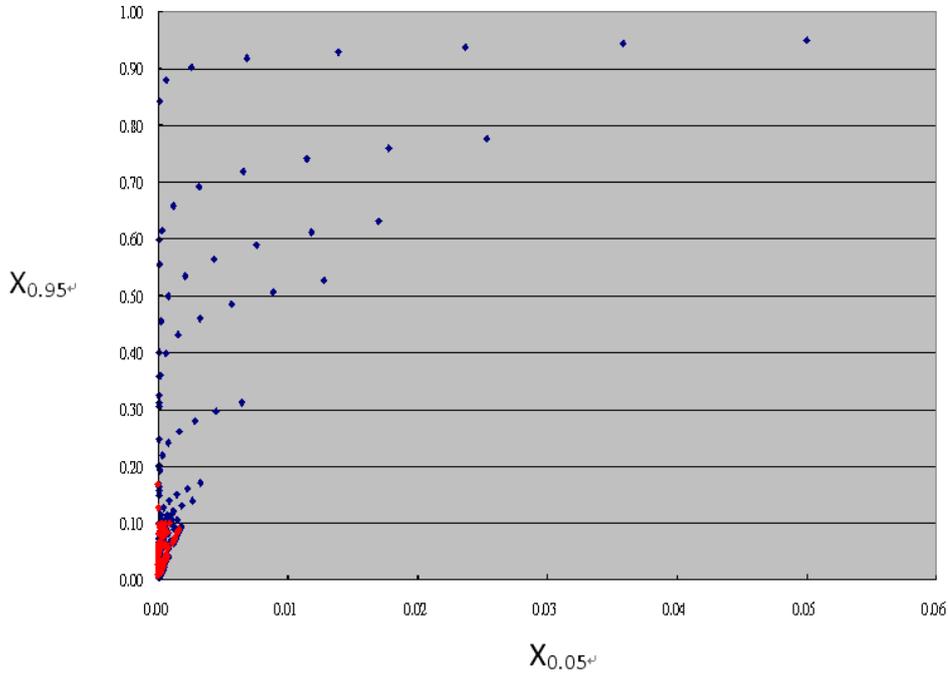
由圖 11 對應到圖 12，可看出參數範圍  $[0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 1]$  在  $[x_{0.05}, x_{0.95}]$  圖中， $x_{0.95}$  將趨近於 0 至



1 之間，而  $x_{0.05}$  會隨著  $x_{0.95}$  往上增加而向右延伸。至於收斂問題則出現在  $x_{0.05}, x_{0.95}$  皆趨近於 0 的區域 (左下角)。

資料來源：本研究小組 (2009)

圖 12. 收斂問題二 $(\alpha, \beta)$ 分佈圖-[ $0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 1$ ]



資料來源：本研究小組 (2009)

圖 13. 收斂問題二 $(x_{0.05}, x_{0.95})$ 分佈圖-[ $0 < \alpha \leq 1, \beta \geq 1$ ]

## (二)小結

本實驗所提出的聯立解法，在未排除收斂問題的情況下，相較於 EP-T 所適用的  $(\alpha, \beta)$  參數範圍 [ $\alpha > 1, \beta > 1$ ]，聯立解法會比 EP-T 好，在完全排除收斂情況後，聯立解法可適用的  $(\alpha, \beta)$  參數範圍將明顯比 EP-T 好很多，因此聯立解法較適用於更廣泛的參數範圍，且在估計  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.25}$ 、 $x_{0.5}$ 、 $x_{0.75}$ 、 $x_{0.95}$  數值時較 EP-T 具有彈性。然而有一篇 Merkhoferr, M.W. (1987) 提到專家意見在人為估計上，估計極端百分位數 ( $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$ ) 時會較不準確，在估計 ( $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$ ) 時會比較準確，因此我們將在下節探討在人為估計上使用聯立解法估計  $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  是否比估計  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  更準確，並進一步去探討  $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  有效收斂範圍。

## 三、 聯立解法延申探討

根據 Merkhoferr, M. W. (1987) 的論點，論文中探討在極端百分位數的情況下進行估計會較不準確，依此論點，專家在提供意見時，在估計  $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  時會比  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  更為精準，經由上一節實驗結果更進一步去探討  $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  的有效收斂範圍。將第肆章第二節的方程式延伸為：

$$\begin{cases} P(x < 0.25 + d_1 + \varepsilon_1) = 0.25 \\ P(x < 0.75 + d_2 + \varepsilon_2) = 0.75 \end{cases} \quad (20)$$

方程式中 0.25、0.75 代表一個專家意見，在實務上容易影響工時估計的因素大致有兩種，一種是專家根據外在資訊產生出對工時估計的不同判斷 ( $d_1$ 、 $d_2$ )，另一種則是環境中的不確定因素所造成的干擾 ( $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ )，當  $d_1$ 、 $d_2$  由 0 開始變化，代表專家提供不同的意見，從 0.25

這邊開始的變化是屬於比較樂觀的意見，從 0.75 開始的變化是屬於比較悲觀的意見，公式的可行性限制為： $0 < 0.25 + d_1 < 0.75 + d_2 < 1$ 。並假設  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  服從常態分配(normal distribution)

$$\varepsilon_1 \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_1}^2), \varepsilon_2 \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_2}^2) \quad (21)$$

當  $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ 、 $\sigma_{\varepsilon_2}^2$  數值越大代表  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  的干擾會越大；反之數值越小會產生較小影響。

接著我們將實驗分成兩個部分，一種是沒有隨機干擾項的情況（設定  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  為 0），一種是加上隨機干擾項的情況（設定  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  不為 0）

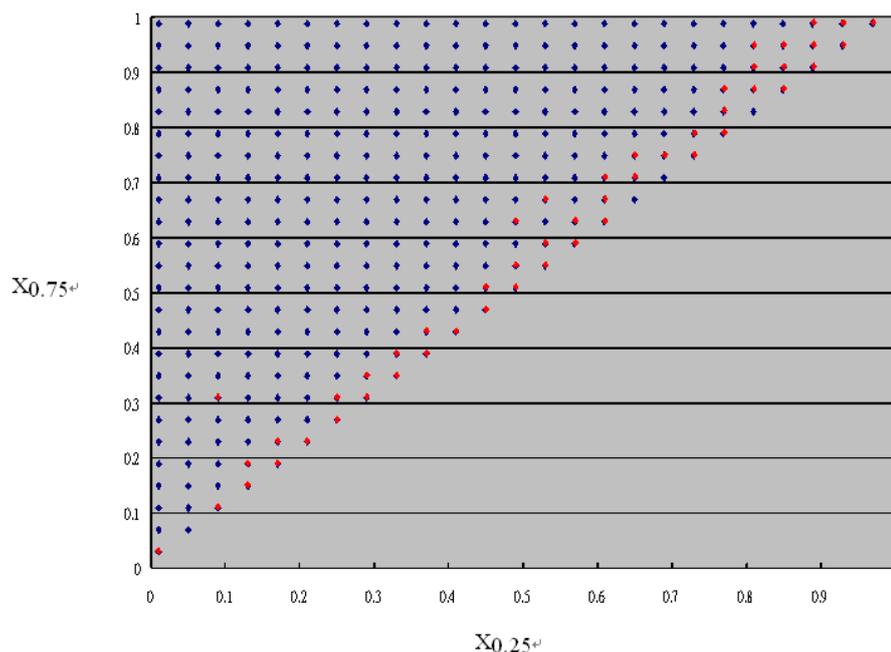
### (一)實驗

1.上半部實驗將公式假設在沒有隨機干擾項的情況下，對於期望值以及變異數的變化進行探討，把  $d_1$ 、 $d_2$  的調整，依 0.04 的增減幅度，遵守可行性的限制，分別向正方（右）、負方（左）調整，共四種變化： $(+, +)$ 、 $(+, -)$ 、 $(-, +)$ 、 $(-, -)$ 。

$(+, +)$ 變化： $d_1$ 、 $d_2$  皆向正方以 0.04 幅度分別調整，表示專家會增加樂觀估計時間，也會增加悲觀的估計時間，樂觀與悲觀完工評估都會悲觀一點，例如： $(0.25 + 0.12, 0.75 + 0.16)$ 。 $(+, -)$ 、 $(-, +)$ 、 $(-, -)$ 的變化以此類推。

之後使用數值方法求解出  $\hat{\alpha}_{NEW}$  與  $\hat{\beta}_{NEW}$ ，並以標準 Beta 分配計算其  $\hat{\mu}_{NEW}$ 、 $\hat{\sigma}_{NEW}^2$ 。

由本實驗結果顯示，收斂問題二出現在  $0 < (0.25 + d_1) - (0.75 + d_2) \leq 0.16$ ，表示在  $0.25 + d_1$  和  $0.75 + d_2$  很接近的時候，較有可能產生收斂上的問題，從收斂點分佈來看，圖 13 與圖 2 相較之下，收斂問題二在  $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  分佈的弧度明顯平坦，也證明了  $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  與  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  在相同的實驗條件下， $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  比較不會產生收斂上的問題，另外  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  較接近極端，其收斂空間受限也可能產生收斂問題，所以經由本實驗的評估，關於聯立解法在設定百分位數時，實務上設定  $x_{0.25}$ 、 $x_{0.75}$  會比  $x_{0.05}$ 、 $x_{0.95}$  更為精準。



資料來源：本研究小組 (2009)

圖 14. 收斂問題二( $x_{0.25}, x_{0.75}$ )分佈圖

2.延續上實驗，設定 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 不為0的情況，進行探討對於期望值以及變異數的變化。

(1)本實驗的可行性限制為： $0 < 0.25 + d_1 + \varepsilon_1 < 0.75 + d_2 + \varepsilon_2 < 1$ ，公式(20)中 $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$ 的變化服從標準常態分配。

(2)公式 (21)中 $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ 、 $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ 會反應干擾的大小，設定其進行 100 次的隨機干擾，分別以數值方法

求出 100 個經過干擾的 $\hat{\alpha}_{NEW}$ 與 $\hat{\beta}_{NEW}$ 並用 $\hat{\alpha}_{NEW}^*$ 、 $\hat{\beta}_{NEW}^*$ 表示，再由這些值以標準 Beta 分配計

算其 100 個干擾後的 $\hat{\mu}_{NEW}$ 、 $\hat{\sigma}_{NEW}^2$ ，並以 $\hat{\mu}_{NEW}^*$ 、 $\hat{\sigma}_{NEW}^{2*}$ 表示，將求出的數值取平均值，得

到 $\overline{\hat{\mu}_{NEW}^*}$ 與 $\overline{\hat{\sigma}_{NEW}^{2*}}$ ，本段求解干擾後數值的方法稱為模擬方法。

此實驗使用標準誤來做信賴區間的推估，如公式 (22) (23)所示，若上實驗 $\hat{\mu}_{NEW}$ 、 $\hat{\sigma}_{NEW}^2$ 求算結果與本實驗結果的差距位於正負兩倍標準誤區間之內，則表示干擾沒有顯著誤差，若落在此區間外，就表示有明顯誤差。標準誤的產生是經由公式 (24) (25)所計算出來的。

$$\left| \hat{\mu}^* - \hat{\mu}_{NEW} \right| \leq 2 \hat{\mu} std \quad (22)$$

$$\left| \hat{\sigma}^{2*} - \hat{\sigma}_{NEW}^2 \right| \leq 2 \hat{\sigma}^2 std \quad (23)$$

$$\hat{\mu} \text{ 的標準誤：} \hat{\mu} std = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} (\hat{\mu}_i - \mu)^2}{100-1}} \quad (24)$$

$$\hat{\sigma}^2 \text{ 的標準誤：} \hat{\sigma}^2 std = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} (\hat{\sigma}_i^2 - \sigma^2)}{100-1}} \quad (25)$$

為了分析干擾項大小會不會影響我們的估計值，分成不同程度的干擾來進行驗算，以判定哪一種干擾情況下容易造成公式 (20)的顯著誤差，在實務上，干擾的情況並不會都產生對等的干擾，所以加入了兩種混和變異，不同程度的干擾變化分成：小變異、大變異、混合變異 I、混合變異 II。

(1)小變異：設定 $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ 、 $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ 為六倍標準差，服從可行性限制，求出 $\hat{\mu} std$ 、 $\hat{\sigma}^2 std$ 。大變異則

設定 $\sigma_{\varepsilon_1}^2$ 、 $\sigma_{\varepsilon_2}^2$ 為一倍標準差。

(2)混合變異 I：設定  $\sigma_{\varepsilon_1}^2$  為一倍標準差，設定  $\sigma_{\varepsilon_2}^2$  為六倍標準差，服從可行性限制，求出

$\hat{\mu}^{std}$ 、 $\hat{\sigma}^2^{std}$ 。混合變異 II 則設定  $\sigma_{\varepsilon_1}^2$  為六倍標準差，設定  $\sigma_{\varepsilon_2}^2$  為一倍標準差。

本實驗下半部持續探討  $\varepsilon_1$ 、 $\varepsilon_2$  不為 0 的情況，使用模擬方法求解，以了解在不同干擾大小下，是否會對公式 (20)產生明顯的誤差影響，結果如表 15 所示，在運算受到小變異干擾的情況下，顯著誤差的比例很小，但經過大變異干擾後，顯著誤差的比例驟增，證實了聯立解法會受到干擾大小的不同，產生明顯的誤差影響。

另外在小變異的情況，收斂問題二仍然出現在  $0 < (0.25 + d_1) - (0.75 + d_2) \leq 0.16$  的範圍中，但是受到大變異干擾後，收斂範圍就變得非常雜亂，無法找出其規律性。

表 15. 聯立解法在不同變異之下誤差比率分析

	小變異 (6 倍標準差)	大變異 (1 倍標準差)	混合變異 I	混合變異 II
$\hat{\mu}^*$ 無顯著	92%	61%	63.7%	74.8%
$\hat{\mu}^*$ 有顯著	8%	39%	36.3%	25.2%
$\hat{\sigma}^2$ 無顯著	87.7%	31.9%	30.8%	42.6%
$\hat{\sigma}^2$ 有顯著	12.3%	68.1%	69.2%	57.4%

資料來源：本研究小組整理 (2009)

## (二)小結

從收斂範圍的結果來看，我們建議實務上進行評估也應盡量避免樂觀與悲觀意見過於接近，會比較不準確，且在實驗 4.2 中，聯立解法與 EP-T 的準確度比較，不論有沒有排除收斂上的問題，都比 EP-T 精準，而本節依照前人的理論，延伸探討 25 百分位數與 75 百分位數的部分，也經由圖表比較，證實其百分位數，比較不會有收斂上的問題，因此我們建議聯立解法在設定百分位數，採用 25 百分位數及 75 百分位數的專家意見。經由本實驗的評估，關於聯立解法在設定百分位數時，實務上設定  $x_{0.25}, x_{0.75}$  會比  $x_{0.05}, x_{0.95}$  更為精準，所以我們大膽預估聯立解法(0.25、0.75)的部分，使用上的準確度會比 EP-T 良好許多。

## 伍、 結論與後續研究

本研究主要在探討整個專案排程中最適工時估計的方法。我們比較聯立解法與前人所提出的公式，何者較為適用，並歸納出該方法在不同情況下所適用的範圍。本章節主要針對研究的步驟、實驗、結果做總結，共分為兩節，第一節為結論，第二節為後續研究與建議。

### 一、 研究發現與結論

將 4.2 節中提出的聯立解法，與前人所提出的公式做比較，結果顯示聯立解法比 EP-T、ES-M、EL-L 公式更加適用於專案排程的工時估計，且適用的範圍也較廣泛，唯一美中不足的地方是聯立解法無法避免軟體計算上所產生的收斂問題，倘若能排除收斂問題，理論上將會更加精準；而在實務上，根據 Merkhofer, M.W. (1987)的論點，常人在估計極端的數值時會較不準確，因此我們建議聯立解法在設定百分位數，採用 25 百分位數及 75 百分位數的專家意見，且已經由實驗 4.3 證實 25 百分位數及 75 百分位數較不會有收斂上的問題。

### 二、 後續研究與建議

以本研究的結果為基礎，仍有一些問題值得做更深入的探討，以下是給後續研究者的建議：

(一)由於聯立解法採用 Mathematica 軟體進行計算，而此軟體採用的數值分析方法為牛頓法，因此會有數值無法收斂的問題，導致適用的情況受到很大的限制，建議可深入探討是否有其他數值計算方法較聯立解法更為適用。

(二)即使聯立解法有收斂上的問題，但其準確度及適用範圍皆比前人的公式來的更好，因此我們仍推崇此方法。另外為了使聯立解法使用上更加穩定，進一步釐清容易產生收斂問題的範圍也是值得持續探討的課題。

(三)前人尚未討論到人為因素的干擾，因此無法與聯立解法做比較，建議後續研究可針對干擾因素做深入的分析。

(四)聯立解法因為受到人為因素的干擾，普遍存在著誤差，其誤差值會隨著干擾程度而有所不同，後續研究可提出其他的改進方法，來降低估計受到干擾的影響。

## 參考文獻

Merkhofer, M. W. "Quantifying judgmental uncertainty : Methodlogy, experiences, and insights, " *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 17, 741-752.

Keefer, D. and Verdini (1993), "Better Estimation of PERT Activity Time Parameters," *Management Science*, 39(9), 1086-1091.

Lau,H.S., Lau,A.H.L (1998), "improved pert-type formula for standard," *IIE Transactions*, 30,273-275.